ЛЕКЦИИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Педагог:Зейналова Гюльтекин

Матрица.

Матрица A размера $m\times n$ — это прямоугольная таблица чисел, расположенных в m строках и n столбцах

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

где a_{ij} ($i=1, \ldots, m;\ j=1, \ldots, n$) — это элементы матрицы A. Первый индекс i — это номер строки, второй индекс j — это номер столбца, на пересечении которых расположен элемент a_{ij}.
Сокращённое обозначение матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

- *Порядок матрицы* — это число ее строк или столбцов.
- *Главная диагональ квадратной матрицы* — это диагональ, идущая из левого верхнего в правый нижний угол.
- *Прямоугольная матрица* — это матрица, у которой число строк не равно числу столбцов.
- *Квадратная матрица* — это матрица у которой число строк равно числу столбцов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- *Матрица-столбец* — это матрица, у которой всего один столбец:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \cdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}$$

- *Матрица-строка* — это матрица, у которой всего одна строка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- *Диагональная матрица* — это квадратная матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, стоящих на главной диагонали, равны нулю.
- *Единичная матрица* — это диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Матрица квадратная диагональная*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- *Треугольная матрица* — это квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные по одну сторону главной диагонали, равны нулю.

- *Матрица верхняя треугольная*:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

- *Матрица нижняя треугольная*:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ 5 & 6 & 3\end{pmatrix}$$

- *Нулевая матрица* — это матрица, все элементы которой равны 0:

$$0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Операции над матрицами.

- *Равенство матриц.*
  Две матрицы $A\ (a_{ij})$, $B\ (b_{ij})$ совпадают $|A=B|$, если совпадают их размеры и соответствующие элементы равны, то есть при всех i, j $a_{ij}=b_{ij}$.

- *Сложение матриц.*
  Суммой двух матриц $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$ одинаковых размеров называется матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}=A+B$ тех же размеров, элементы которой определяются равенствами $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

- *Умножение матрицы на число.*
  Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на число $\lambda \in R$ называется матрица $B=(b_{ij})_{m\times n}=\lambda A$, элементы которой определяются равенствами $b_{ij}=\lambda a_{ij}$.

- *Умножение матриц.*
  Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{m\times k}$ на матрицу $B=(b_{ij})_{k\times n}$называется матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}=A\cdot B$ размера $m\times n$, элементы которой c_{ij} определяются равенством

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+ \dots a_{ik}b_{kj}$.

Таким образом, элемент матрицы $C=A\cdot B$, расположенный в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

- *Транспонированные матрицы.*

  Транспонированием матрицы A называется замена строк этой матрицы ее столбцами с сохранением их номеров.

  Полученная матрица обозначается через A' или A^T.

  Квадратная матрица называется симметричной, если $A=A'$, то есть для элементов выполнены равенства $a_{ij}=a_{ji}$.

- *Обратная матрица*.

  Квадратная матрица n–го порядка называется вырожденной, если определитель этой матрицы равен нулю, $|A| = 0$, и невырожденной, если $|A| \neq 0$.

  Матрица A^{-1} называется обратной матрицей для некоторой квадратной матрицы A, если выполняется соотношение:

  $$A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=E$$

  Если матрица A^{-1} не вырождена, то существует, и притом единственная, обратная матрица A^{-1}, равная $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left(A^{V}\right)^{T}$, где $A^V = A_{ij}$ — присоединенная матрица (матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы, стоящих на тех же местах).

  1) $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

  2) $\alpha\times A^{-1}=\frac{1}{\alpha}\times A^{-1}$

  3) $(A\times B)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$

  4) $\left(A^{-1}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{-1}$

- *Алгоритм нахождения A^{-1}* заключается в следующих пунктах:

  1) Находим $\det A$, проверяем $\det A \neq 0$.

  2) Находим M_{ij} — все миноры матрицы A.

3) Определяем $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

4) Строим матрицу алгебраических дополнений $A^V=\left(A_{ij}\right)$ и транспонируем: $\left(A^V\right)^T=\left(A_{ij}\right)$

5) Делим каждый элемент матрицы на *det A*: $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left(A^V\right)^T$ Пример 5.

- *Элементарные преобразования строк (столбцов) матрицы*:
  1) перестановка строк (столбцов);
  2) умножение строки (столбца) на число $\alpha \neq 0$;
  3) прибавление к элементам строки (столбца) матрицы элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число.

- *Решение матричных уравнений*.
  Матричное уравнение — это уравнение, содержащее неизвестную матрицу *X* и известные матрицы *A*, *B*, …, .
  Простейшие типы матричных уравнений:
  1) $A\times X-B$. Матрица *A* – квадратная и невырожденная, $|A| \neq 0$, следовательно, существует обратная матрица A^{-1}.
  Умножим уравнение на A^{-1} слева: $A^{-1}\times A\times X=A^{-1}\times B,\ E\times X=A^{-1}\times B,\ X=A^{-1}\times B$
  2) $X\times A=B$. Матрица *A* – квадратная, $|A| \neq 0$.
  Умножим уравнение на A^{-1} справа: $X\times A\times A^{-1}=B\times A^{-1}\Rightarrow X=B\times A^{-1}$.
  3) $A\times X\times B=C$. Матрицы *A* и *B* – квадратные, $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$.
  Умножим уравнение на A^{-1} слева: $A^{-1}\times A\times X\times B=A^{-1}\times C \Rightarrow X\times B=A^{-1}\times C$
  Умножим уравнение на B^{-1} справа: $X\times B\times B^{-1}=A^{-1}\times C\times B^{-1} \Rightarrow X=A^{-1}\times C\times B^{-1}$

•

3) Переставить строки со 2–й по m и столбцы со 2–го по n так, чтобы $a_{22} \neq 0$. Повторить операцию (2) со вторым столбцом: во втором столбце все элементы, кроме a_{12} и a_{22}, обратить в ноль.

Окончательно после многократного применения указанной процедуры и отбрасывания нулевых строк преобразованная матрица будет иметь вид:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \cdots & \widetilde{a}_{1,r-1} & \widetilde{a}_{1r} & \cdots & \widetilde{a}_{1n} \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & \cdots & \widetilde{a}_{2,r-1} & \widetilde{a}_{2r} & \cdots & \widetilde{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \widetilde{a}_{r-1,r-1} & \widetilde{a}_{r-1,r} & \cdots & \widetilde{a}_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \widetilde{a}_{rr} & \cdots & \widetilde{a}_{rn} \end{pmatrix}$$

Тогда ранг матрицы A равен: $rang\ A = rang\ \tilde{A}$.

Определитель матрицы.

Определитель квадратной матрицы.

Определитель первого порядка представляет собой число.

Определитель квадратной матрицы порядка n $A=(a_{ij})_{m\times n}$обозначается символами:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Определитель квадратной матрицы A второго порядка — это число, равное:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Определитель квадратной матрицы A третьего порядка — это число, равное:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

- *Правило треугольников* (правило Саррюса):

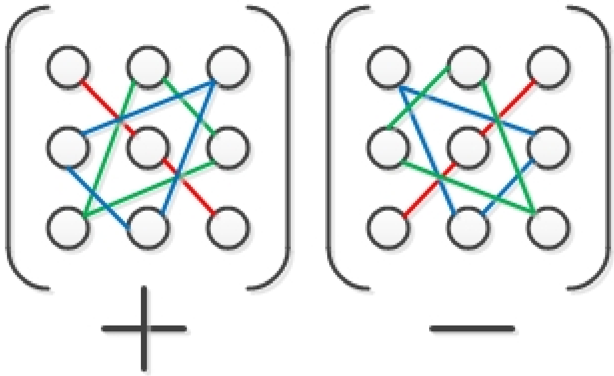

рисунок 1

Знаки (+) и (–) соответствуют знакам определенных слагаемых, входящих в определитель, элементы определителя изображаются кружками, а соответствующие произведения — отрезками или треугольниками.

- *Алгебраическое дополнение $A=(a_{ij})$* элемента a_{ij} — это определитель n-1 порядка, полученный из $|A|$ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

Свойства определителей.

1. Определитель квадратной матрицы A не меняется при транспонировании: $|A^T|=|A|$.

2. При перестановке местами любых двух строк (столбцов) определитель $|A|$ меняет знак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.

4. Умножение всех элементов некоторой строки (столбца) определителя $|A|$ на число k равносильно умножению определителя на это число:

$$\begin{vmatrix} k\times a_{11} & k\times a_{12} & k\times a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\times\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ k=const$$

5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя $|A|$ равны нулю, то и сам определитель равен нулю (вытекает из предыдущего свойства при (*k = 0*):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

6. Если все элементы двух строк (столбцов) определителя $|A|$ пропорциональны, то определитель равен нулю.

7. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей:

$$|A| = \begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} & a'_{13}+a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. Если к элементам какой-нибудь строки (столбца) определителя $|A|$ прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольный множитель *k*, то величина определителя не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+k\times a_{21} & a_{12}+k\times a_{22} & a_{13}+k\times a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

9. Определитель $|A|$ численно равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на соответствующие алгебраические

дополнения:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3},\ i=1,2,3$$

10. Определитель произведения матриц *A* и *B* равен произведению их определителей:

$$|A\times B|=|A|\times|B|.$$

Определители n–го порядка.

- *Минор* M_{ij} или Δ_{ij} элемента a_{ij} (иначе – дополнительный минор элемента a_{ij}) определителя *n*-го порядка — это определитель (*n–1*) порядка, полученный из исходного вычеркиванием *i*–й строки и *j*–го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\Rightarrow M_{ij}$$

- *Алгебраическое дополнение* A_{ij} элемента a_{ij} — это его минор со знаком $(-1)^{i+j}$, где *i* – номер строки, а *j* – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ или $A_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.
  Для определителей *n*-го порядка имеют место все перечисленные выше свойства определителей.

- Правило выбора знака перед минором в алгебраическом дополнении: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

- *Определитель n*-го порядка $|A|$ численно равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

Решение системы по формулам Крамера

- Сначала мы подробно рассмотрим правило Крамера для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Зачем? – Ведь простейшую систему можно решить школьным методом, методом почленного сложения!
- Дело в том, что пусть иногда, но встречается такое задание – решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными по формулам Крамера. Во-вторых, более простой пример поможет понять, как использовать правило Крамера для более сложного случая – системы трех уравнений с тремя неизвестными.
- Кроме того, существуют системы линейных уравнений с двумя переменными, которые целесообразно решать именно по правилу Крамера!
- Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} a_1x+b_1y=s_1 \\ a_2x+b_2y=s_2 \end{cases}$
- На первом шаге вычислим определитель $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, его называют *главным определителем системы*.
- Если $\Delta=0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать **метод Гаусса**.
- Если $\Delta\neq0$, то система имеет единственное решение, и для нахождения корней мы должны вычислить еще два определителя:
  $\Delta_x=\begin{vmatrix} s_1 & b_1 \\ s_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и $\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & s_1 \\ a_2 & s_2 \end{vmatrix}$
- На практике вышеуказанные определители также могут обозначаться латинской буквой D.

- Корни уравнения находим по формулам:
  $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$
- <u>Пример :</u>
- Решить систему линейных уравнений
  $$\begin{cases} 506a + 66b = 2315{,}1 \\ 66a + 11b = 392{,}3 \end{cases}$$
- **Решение**: Мы видим, что коэффициенты уравнения достаточно велики, в правой части присутствуют десятичные дроби с запятой. Запятая – довольно редкий гость в практических заданиях по математике, эту систему я взял из эконометрической задачи.
- Как решить такую систему? Можно попытаться выразить одну переменную через другую, но в этом случае наверняка получатся страшные навороченные дроби, с которыми крайне неудобно работать, да и оформление решения будет выглядеть просто ужасно. Можно умножить второе уравнение на 6 и провести почленное вычитание, но и здесь возникнут те же самые дроби.
- Что делать? В подобных случаях и приходят на помощь формулы Крамера.
- $\Delta = \begin{vmatrix} 506 & 66 \\ 66 & 11 \end{vmatrix} = 506 \cdot 11 - 66 \cdot 66 = 5566 - 4356 = 1210 \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.
- $\Delta_a = \begin{vmatrix} 2315{,}1 & 66 \\ 392{,}3 & 11 \end{vmatrix} = 2315{,}1 \cdot 11 - 392{,}3 \cdot 66 = 25466{,}1 - 25891{,}8 = -425{,}7$;
  $a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{-425{,}7}{1210} \approx -0{,}35$
- $\Delta_b = \begin{vmatrix} 506 & 2315{,}1 \\ 66 & 392{,}3 \end{vmatrix} = 506 \cdot 392{,}3 - 66 \cdot 2315{,}1 = 198503{,}8 - 152796{,}6 = 45707{,}2$;
  $b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{45707{,}2}{1210} \approx 37{,}77$
- **Ответ**: $a \approx -0{,}35$, $b \approx 37{,}77$
- Оба корня обладают бесконечными хвостами, и найдены приближенно, что вполне приемлемо (и даже обыденно) для задач эконометрики.
- Комментарии здесь не нужны, поскольку задание решается по готовым формулам, однако, есть один нюанс. Когда используете

данный метод, **обязательным** фрагментом оформления задания является следующий фрагмент: $\Delta \neq 0$ *, значит, система имеет единственное решение»*. В противном случае рецензент может Вас наказать за неуважение к теореме Крамера.

- Совсем не лишней будет проверка, которую удобно провести на калькуляторе: подставляем приближенные значения $a \approx -0{,}35 \quad b \approx 37{,}77$ в левую часть каждого уравнения системы. В результате с небольшой погрешностью должны получиться числа, которые находятся в правых частях.

- <u>Пример :</u>

  Решить систему по формулам Крамера. Ответ представить в обыкновенных неправильных дробях. Сделать проверку.
  $$\begin{cases} 7x + y = 23 \\ -5x + 3y = 1 \end{cases}$$

- Это пример для самостоятельного решения (пример чистового оформления и ответ в конце урока).

- Переходим к рассмотрению правила Крамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными:
  $$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = s_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = s_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = s_3 \end{cases}$$

- Находим главный определитель системы:
  $$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- Если $D = 0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать **метод Гаусса**.

- Если $D \neq 0$, то система имеет единственное решение и для нахождения корней мы должны вычислить еще три определителя:
  $$D_1 = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 & c_1 \\ a_2 & s_2 & c_2 \\ a_3 & s_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_3 & s_3 \end{vmatrix}$$

- И, наконец, ответ рассчитывается по формулам:
  $$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

- Пример :

Решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

- **Решение**: Решим систему по формулам Крамера.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 3 \cdot (-4-2) + 2 \cdot (-3+4) + 4 \cdot (-3-8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

- $= 21 \cdot (-4-2) + 2 \cdot (-9+20) + 4 \cdot (-9-40) = -126 + 22 - 196 = -300$
- $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{-300}{-60} = 5$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 21 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} =$$

- $= 3 \cdot (-9+20) - 21 \cdot (-3+4) + 4 \cdot (30-18) = 33 - 21 + 48 = 60$
- $x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{60}{-60} = -1$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

- $= 3 \cdot (40+9) - 3 \cdot (-20+21) + 2 \cdot (-18-84) = 147 - 3 - 284 = -60$
- $x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{-60}{-60} = 1$
- **Ответ**: $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 1$.

Расстояние от точки до прямой

- **Теорема.** Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как

- $$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$.
- **Доказательство.** Пусть точка М $_1$(х $_1$, у $_1$) – основание перпендикуляра, опущенного из точки М на заданную прямую. Тогда расстояние между точками М и М$_1$:
- $$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$ (1)
- Координаты x$_1$ и у$_1$ могут быть найдены как решение системы уравнений:
- $$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \end{cases}$$
- Второе уравнение системы – это уравнение прямой, проходящей через заданную точку М $_0$ перпендикулярно заданной прямой. Если преобразовать первое уравнение системы к виду:
- A(x – x $_0$) + B(y – y$_0$) + Ax$_0$ + By$_0$ + C = 0,
- то, решая, получим:
- $$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C),$$ $$y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$$
- Подставляя эти выражения в уравнение (1), находим:
- $$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
- Теорема доказана.
- **Пример**. Определить угол между прямыми: y = -3 x + 7; y = 2 x + 1.
- k $_1$ = -3; k $_2$ = 2; tgφ = $\left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)2}\right| = 1$; φ= п /4.
-
- **Пример**. Показать, что прямые 3х – 5у + 7 = 0 и 10х + 6у – 3 = 0 перпендикулярны.
- *Решение*. Находим: k $_1$ = 3/5, k$_2$ = -5/3, k 1* k 2 = -1, следовательно, прямые перпендикулярны.
- **Пример**. Даны вершины треугольника А(0; 1), B (6; 5), C (12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины С.

- *Решение*. Находим уравнение стороны
  AB: $\frac{x-0}{6-0}=\frac{y-1}{5-1}; \quad \frac{x}{6}=\frac{y-1}{4}$; 4 x = 6 y – 6;
- 2 x – 3 y + 3 = 0; $y=\frac{2}{3}x+1.$
- Искомое уравнение высоты имеет вид: Ax + By + C = 0 или y = kx + b . k = $-\frac{3}{2}$. Тогда y = $-\frac{3}{2}x+b$. Т.к. высота проходит через точку С, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1=-\frac{3}{2}12+b,$ откуда b = 17. Итого: . $y=-\frac{3}{2}x+17$
- Ответ: 3 x + 2 y – 34 = 0.

Общее уравнение прямой

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

- Ах + Ву + С = 0,
- причем постоянные А, В не равны нулю одновременно. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.** В зависимости от значений постоянных А,В и С возможны следующие частные случаи:
- • C = 0, А ≠0, В ≠ 0 – прямая проходит через начало координат
-
- • А = 0, В ≠0, С ≠0 { By + C = 0}- прямая параллельна оси Ох
-
- • В = 0, А ≠0, С ≠ 0 { Ax + C = 0} – прямая параллельна оси Оу
-
- • В = С = 0, А ≠0 – прямая совпадает с осью Оу
-
- • А = С = 0, В ≠0 – прямая совпадает с осью Ох
-

- Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

- Пусть в пространстве заданы две точки М $_1$ (x $_1$, y $_1$, z $_1$) и M$_2$ (x $_2$, y $_2$, z $_2$), тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:
- $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$
- Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:
- $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$
- если x $_1$ ≠ x$_2$ и x = x $_1$, если x $_1$ = x$_2$.
- Дробь $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ = k называется **угловым коэффициентом** прямой.
- **Пример**. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).
- *Решение.* Применяя записанную выше формулу, получаем:
- $$y-2=\frac{4-2}{3-1}(x-1)$$
  $$y-2=x-1$$
  $$x-y+1=0$$

- **Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту**

- Если общее уравнение прямой Ах + Ву + С = 0 привести к виду:
- $$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$
- и обозначить $-\frac{A}{B}=k; \quad -\frac{C}{B}=b; \quad т.е. \quad y=kx+b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k** .

Уравнение прямой в отрезках

- Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 $C\neq0$, то, разделив на –С, получим: $-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$ или
- $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где
- $a=-\frac{C}{A};\quad b=-\frac{C}{B}$
- Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *а* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.
- **Пример.** Задано общее уравнение прямой х – у + 1 = 0. Найти уравнение этой прямой в отрезках.
- С = 1, $-\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$, а = -1, b = 1.
- **Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой**
- **Определение.** Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой у = kx + b представляется уравнением:
- $y-y_1=-\frac{1}{k}(x-x_1)$
- **Расстояние от точки до прямой**
- **Теорема.** Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой Ах + Ву + С =0 определяется как
- $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
- **Доказательство.** Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки М на заданную прямую. Тогда расстояние между точками М и M_1 :
- $d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$ (1)
- Координаты x_1 и y_1 могут быть найдены как решение системы уравнений:
- $\begin{cases}Ax+By+C=0\\A(y-y_0)-B(x-x_0)=0\end{cases}$

- Второе уравнение системы – это уравнение прямой, проходящей через заданную точку М $_0$ перпендикулярно заданной прямой. Если преобразовать первое уравнение системы к виду:
- $A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0$,
- то, решая, получим:

$$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C),$$

$$y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$$

- Подставляя эти выражения в уравнение (1), находим:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Теорема доказана.
- **Пример**. Определить угол между прямыми: y = -3 x + 7; y = 2 x + 1.
- $k_1 = -3$; $k_2 = 2$; tgφ = $\left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)2}\right| = 1$; φ= п /4.
- **Пример**. Показать, что прямые 3х – 5у + 7 = 0 и 10х + 6у – 3 = 0 перпендикулярны.
- *Решение*. Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1 * k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.
- **Пример**. Даны вершины треугольника А(0; 1), B (6; 5), C (12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины С.
- *Решение*. Находим уравнение стороны

АВ: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$; 4 x = 6 y – 6;

- 2 x – 3 y + 3 = 0; $y = \frac{2}{3}x + 1.$
- Искомое уравнение высоты имеет вид: Ax + By + C = 0 или y = kx + b . k = $-\frac{3}{2}$. Тогда y = $-\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку С, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b,$ откуда b = 17. Итого: .

$$y = -\frac{3}{2}x + 17$$

- Ответ: 3 x + 2 y – 34 = 0.

Уравнение окружности

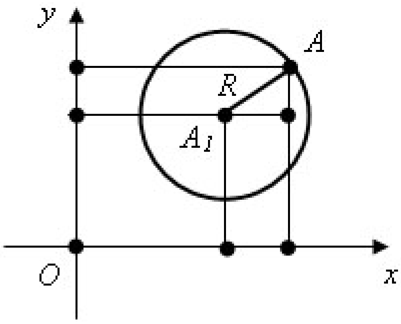

рисунок 2

Пусть есть окружность с центром в точке A1 (a; b) и радиусом R. Возьмем произвольную точку A (x; y) на окружности. Тогда, как видно из рисунка, по теореме Пифагора

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(A-A_1)^2=R^2$$

- это уравнение окружности.
Если центр окружности находится в начале координат, т.е. a=0 и b=0, то уравнение окружности принимает вид:

$$x^2+y^2=R^2$$

Обратно: любая точка A, координаты которой удовлетворяет данному уравнению окружности, принадлежат окружности.

Линии второго порядка(эллипс,парабола,гипербола)

- **Общее уравнение** линии второго порядка имеет вид $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, где A, B, C, D, E, F – произвольные действительные числа (*B, D, E принято записывать с множителем-«двойкой»*), причём коэффициенты A, B, C не равны одновременно нулю.

- Если $A = B = C = 0$, то уравнение упрощается до $2Dx + 2Ey + F = 0$, и если коэффициенты D, E одновременно не равны нулю, то это в точности **общее уравнение «плоской» прямой**, которая представляет собой *линию первого порядка*.
- Чтобы определить порядок линии, нужно перебрать все слагаемые её уравнения и у каждого из них найти сумму степеней входящих переменных.
- Например:
- слагаемое $2Dx$ содержит «икс» в 1-й степени;
  слагаемое $2Ey$ содержит «игрек» в 1-й степени;
  в слагаемом F переменные отсутствуют, поэтому сумма их степеней равна нулю.
- Далее из полученных чисел выбирается максимальное значение, в данном случае единица, – это и есть порядок линии.
- Теперь разберёмся, почему уравнение $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ задаёт линию **второго** порядка:
- слагаемое Ax^2 содержит «икс» во 2-й степени;
  у слагаемого $2Bx^1y^1$ сумма степеней переменных: 1 + 1 = 2;
  слагаемое Cy^2 содержит «игрек» во 2-й степени;
  все остальные слагаемые – *меньшей* степени.
- Максимальное значение: 2
- Если к нашему уравнению дополнительно приплюсовать, скажем, x^2y, то оно уже будет определять *линию третьего порядка*. Очевидно, что общий вид уравнения линии 3-го порядка содержит «полный комплект» слагаемых, сумма степеней переменных в которых равна трём:
  $Kx^3 + Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3 + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, где коэффициенты K, L, M, N не равны одновременно нулю.
- В том случае, если добавить одно или несколько подходящих слагаемых, которые содержат $x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4$, то речь уже зайдёт о *линии 4-го порядка*, и т.д.
- С алгебраическими линиями 3-го, 4-го и более высоких порядков нам придется столкнуться ещё не раз, в частности, при знакомстве с **полярной системой координат**.

- Однако вернёмся к общему уравнению $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ и вспомним его простейшие школьные вариации. В качестве примеров напрашивается парабола $y=x^2$, уравнение которой легко привести к общему виду $x^2-y=0$, и гипербола $y=\frac{1}{x}$ с эквивалентным уравнением $xy-1=0$. Однако не всё так гладко….
- Существенный недостаток общего уравнения состоит в том, что почти всегда не понятно, какую линию оно задаёт. Даже в простейшем случае $xy-1=0$ не сразу сообразишь, что это гипербола. Такие расклады хороши только на маскараде, поэтому в курсе аналитической геометрии рассматривается типовая задача **приведения уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду**.

Что такое канонический вид уравнения?

- Это общепринятый стандартный вид уравнения, когда в считанные секунды становится ясно, какой геометрический объект оно определяет. Кроме того, канонический вид очень удобен для решения многих практических заданий. Так, например, по каноническому уравнению $\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$ **«плоской» прямой**, во-первых, сразу понятно, что это прямая, а во-вторых – элементарно просматривается принадлежащая ей точка $M(x_0;y_0)$ и направляющий вектор $\vec{p}(p_1;p_2)$.
- Очевидно, что любая *линия 1-го порядка* представляет собой прямую. На втором же этаже нас ждёт уже не вахтёр, а гораздо более разнообразная компания из девяти статуй:

Классификация линий второго порядка

- С помощью специального комплекса действий любое уравнение линии второго порядка приводится к одному из следующих видов:
- *(a и b – положительные действительные числа)*
- 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$ – каноническое уравнение эллипса;
- 2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – каноническое уравнение гиперболы;
- 3) $y^2=2px \quad (p>0)$ – каноническое уравнение параболы;

- Уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ задаёт окружность радиуса r с центром в точке $\widetilde{O}(x_0;\, y_0)$.
- Освежая ностальгические воспоминания, изобразим на чертеже окружность, заданную уравнением $(x-3)^2+(y+2)^2=1$:

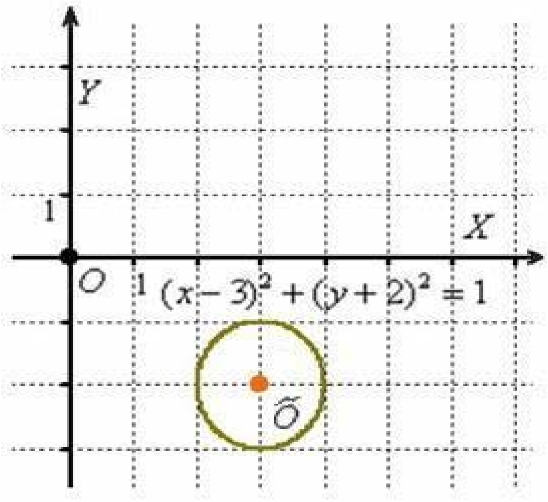

рисунок 3

В исследовательских целях приведём наше уравнение к общему виду, выполнив возведение в квадрат и приведение подобных слагаемых:

$(x-3)^2+(y+2)^2=1$

$x^2-6x+9+y^2+4y+4=1$

$x^2-6x+y^2+4y+12=0$ – как правило, в таком обличье оно и встречается в природе.

- Таким образом, в практических задачах часто предварительно нужно выполнить обратное действие – **выделить полные квадраты**.

Производная и дифференциал функции

Произво́дная — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции.
Определяется как ***предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если таковой предел существует.***
Функцию, имеющую конечную производную, называют **дифференцируемой**.
Процесс вычисления **производной называется дифференци́рованием.**

Производная обозначается символами y ' , f ' (xo), $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.
Геометрический смысл производной состоит в том, что производная есть угловой коэффициент касательной к кривой y=f(x) в данной точке xo; физический смысл - в том, что производная от пути по времени есть мгновенная скорость движущейся точки при прямолинейном движении s = s(t) в момент t0

Вычисление производной — важнейшая операция в дифференциальном исчислении. В этих формулах f и g — произвольные дифференцируемые функции вещественной переменной, а c — вещественная константа.
Этих формул достаточно для дифференцирования любой элементарной функции.

Таблица производных

1. $c' = 0,\ c = \text{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
17. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
18. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
19. $(\operatorname{th} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Правила дифференцирования общих функций

$$(cf)' = cf'$$
$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(f-g)' = f' - g'$$
$$(fg)' = f'g + fg'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \qquad g \neq 0$$
$$(f^g)' = \left(e^{g \ln f}\right)' = f^g \left(f' \frac{g}{f} + g' \ln f\right), \qquad f > 0$$
$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$
$$f' = (\ln f)' f, \qquad f > 0$$

Задание. Найти производную функции $y = x\cos x - \frac{e^x}{x} + 4$

Решение. Используем правила дифференцирования и таблицу производных:

$$y' = \left(x\cos x - \frac{e^x}{x} + 4\right)' = (x\cos x)' - \left(\frac{e^x}{x}\right)' + (4)' =$$
$$= (x)' \cdot \cos x + x \cdot (\cos x)' - \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} + 0 =$$
$$= 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) - \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} =$$
$$= \cos x - x\sin x - \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \cos x - x\sin x - \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

Ответ. $y' = \cos x - x\sin x - \frac{(x-1)e^x}{x^2}$

Задание. Найти производную сложной функции $y = \sqrt{x^2 - 3x + 17}$

Решение. Используем правила дифференцирования элементарных и сложных функций:

$$y' = \left(\sqrt{x^2 - 3x + 17}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3x + 17}} \cdot (x^2 - 3x + 17)' =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3x + 17}} \cdot \left[(x^2)' - (3x)' + (17)'\right] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3x + 17}} \cdot \left[2x^{2-1} - 3 \cdot (x)' + 0\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3x + 17}} \cdot (2x - 3 \cdot 1) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 17}}$$

Ответ. $y' = \dfrac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 17}}$

Производная высшего порядка

Пусть y = f(x) является дифференцируемой функцией. Тогда производная также представляет собой функцию от x. Если она является дифференцируемой функцией, то мы можем найти вторую производную функции f, которая обозначается в виде $f'' = (f')' = \left(\frac{dy}{dx}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогично, если f '' существует и дифференцируема, мы можем вычислить третью производную функции f: $f''' = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$.

Производные более высокого порядка (если они существуют), определяются как

$$f^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)} = \left(f^{(3)}\right)',$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Для нахождения производных высшего порядка можно использовать следующие формулы:

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)},$$

$$(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)},\ C = const,$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)} \quad \text{(формула Лейбница)}.$$

В частности, для производной второго и третьего порядка формула Лейбница принимает вид

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Задание.	Найти производную второго порядка функции $y(x)=x^3+7x^4-3x+4$
Решение.	Согласно определению, вторая производная - это первая производная от первой производной, то есть $y''(x)=(y'(x))'$ Поэтому сначала найдем производную первого порядка от заданной функции согласно правилам дифференцирования и используя таблицу производных: $y'(x)=(x^3+7x^4-3x+4)'=(x^3)'+(7x^4)'-(3x)'+(4)'=$ $=3x^2+7(x^4)'-3(x)'+0=3x^2+7\cdot 4x^3-3\cdot 1=3x^2+28x^3-3$ Теперь найдем производную от производной первого порядка. Это будет искомая производная второго порядка: $y''(x)=(y'(x))'=(3x^2+28x^3-3)'=(3x^2)'+(28x^3)'-(3)'=$ $=3\cdot(x^2)'+28\cdot(x^3)'-0=3\cdot 2x+28\cdot 3x^2=6x+84x^2$
Ответ.	$y''(x)=6x+84x^2$

Неопределенный интеграл

Функция F(x), дифференцируемая в данном промежутке X, называется *первообразной для функции* f(x), или интегралом от f(x), если для всякого x ∈X справедливо равенство:

$F'(x) = f(x).$ (1)

Нахождение всех первообразных для данной функции называется ее *интегрированием. Неопределенным интегралом функции* f(x) на данном промежутке X называется множество всех первообразных функций для функции f(x); обозначение -

$\int f(x)dx$.

Если F(x) - какая-нибудь первообразная для функции f(x),

то $\int f(x)dx = F(x) + C,$ (2)

где C- произвольная постоянная.

Таблица интегралов

Непосредственно из определения получаем основные свойства неопределенного интеграла и список табличных интегралов:

1) $d\int f(x)dx=f(x)$

2) $\int df(x)=f(x)+C$

3) $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$ (a=const)

4) $\int(f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx+\int g(x)dx$

Список табличных интегралов

1. $\int x^m dx = x^{m+1}/(m + 1) +C$; $(m \neq -1)$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x +C$

3. $\int a^x dx = a^x/\ln a + C$ $(a>0, a \neq 1)$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \sin x\, dx = \cos x + C$

6. $\int \cos x\, dx = - \sin x + C$

7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = - \mathrm{ctg}\, x + C$

Замена переменной

Для интегрирования многих функций применяют метод замены переменной или *подстановки,* позволяющий приводить интегралы к табличной форме.

Если функция f(z) непрерывна на $[\alpha,\beta]$, функция $z =g(x)$ имеет на [a,b] непрерывную производную и $\alpha \leq g(x) \leq \beta$, то

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(z)dz, \qquad (3)$$

причем после интегрирования в правой части следует сделать подстановку $z=g(x)$.

Для доказательства достаточно записать исходный интеграл в виде:

$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(g(x))\, dg(x)$.

Например:

1) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int (\ln\, x)' \frac{dx}{\ln^2 x} = \int \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$;

2) $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{(\sin x)' dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{d \sin x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctg} z + C = \operatorname{arctg}(\sin x) + C$.

Метод интегрирования по частям

Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ - функции, имеющие непрерывные производные. Тогда, по правилу дифференцирования произведения,

$d(uv)) = udv + vdu$ или $udv = d(uv) - vdu$.

Для выражения $d(uv)$ первообразной, очевидно, будет uv, поэтому имеет место формула:

$\int udv = uv - \int vdu$ (4)

Эта формула выражает правило *интегрирования по частям*. Оно приводит интегрирование выражения $udv=uv'dx$ к интегрированию выражения $vdu=vu'dx$.

Пусть, например, требуется найти $\int x\cos x\, dx$. Положим $u = x$, $dv = \cos x dx$, так что $du=dx$, $v=\sin x$. Тогда

$\int x\cos x dx = \int x\, d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C$.

Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например,

$\int x^k \ln^m x dx$, $\int x^k \sin bx dx$, $\int x^k \cos bx dx$, $\int x^k e^{ax}$ и другие, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла вводится следующим образом. Пусть на отрезке $[a,b]$ определена функция $f(x)$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на *n* частей точками $a= x_0 < x_1 <...< x_n = b$. Из каждого интервала (x_{i-1}, x_i) возьмем произвольную точку ξ_i и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i$ где

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма вида $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой*, а ее предел при $\lambda = \max\Delta x_i \to 0$, если он существует и конечен, называется *определенным интегралом* функции f(x) от *a* до *b* и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (5).$$

Функция f(x) в этом случае называется *интегрируемой на отрезке* [a,b], числа a и b носят название *нижнего и верхнего предела интеграла*.

Для определенного интеграла справедливы следующие свойства:

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt$

2) $\int_a^a f(x)dx = 0$

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, $(k = const, k\in R)$;

5) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

6) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

7) $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ $(\xi\in[a,b])$.

Последнее свойство называется *теоремой о среднем значении*.

Пусть f(x) непрерывна на [a,b]. Тогда на этом отрезке существует неопределенный интеграл

$\int f(x)dx = F(x) + C$

и имеет место *формула Ньютона-Лейбница*, связывающая определенный интеграл с неопределенным:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (6)$$

Геометрическая интерпретация: определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой y=f(x), прямыми x = a и x = b и отрезком оси *Ox*

Площадь криволинейной трапеции

Если f *- непрерывная и неотрицательная на отрезке* $[a,b]$ *функция, а* F *- её первообразная на этом отрезке, то площадь* S *соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке* $[a,b]$*, т.е.*

$$S = F(b) - F(a)$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию $S(x)$, определенную на отрезке $[a,b]$.

Если $a < x \le b$, то $S(x)$ - площадь той части криволинейной трапеции, которая расположена левее вертикальной прямой, проходящей через точку $M(x,0)$ (рисунок 4).

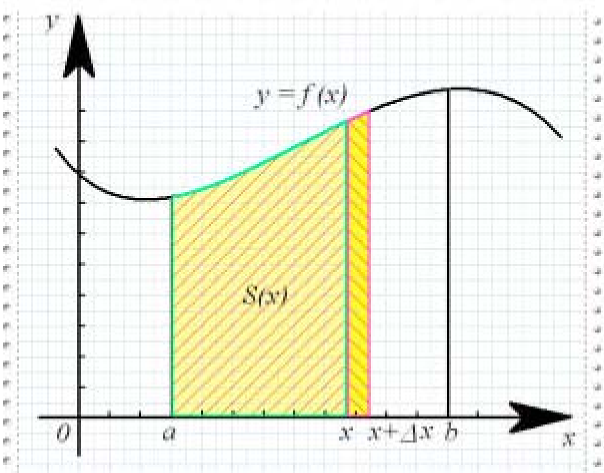

Рисунок 4

Если $x = a$, то $S(a) = 0$;

Если $x = b$, то $S(b) = S$, где S - площадь криволинейной трапеции.

Докажем, что

$$S'(x) = f(x)$$

По определению производной надо доказать, что

$$\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x).$$

Выясним геометрический смысл числителя $\Delta S(x)$. Для простоты рассмотрим случай $\Delta x > 0$. Поскольку $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$,

то $\Delta S(x)$ - площадь фигуры, заштрихованной на рисунке

5. Возьмем теперь прямоугольник той же площади $\Delta S(x)$, опирающийся на отрезок $[x, x+\Delta x]$ (рисунок 5).

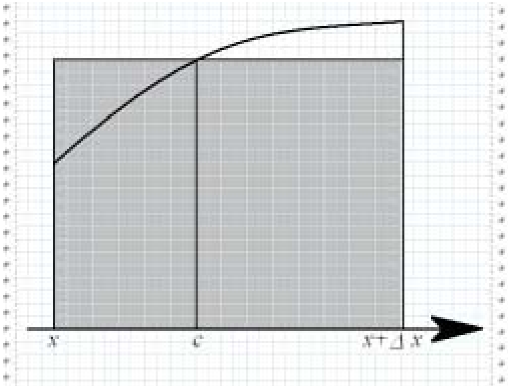

Рисунок 5

В силу непрерывности функции f верхняя сторона прямоугольника пересекает график функции в некоторой точке с абсциссой $c \in [x, x+\Delta x]$ (в противном случае этот прямоугольник либо содержится в части криволинейной трапеции над отрезком $[x, x+\Delta x]$, либо содержит ее; соответственно его площадь будет меньше или больше площади $\Delta S(x)$). Высота прямоугольника равна $f(c)$. По формуле площади прямоугольника имеем $\Delta S(x) = f(c) \cdot \Delta x$, откуда $\dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(c)$. (Эта формула верна и при $\Delta x < 0$) Поскольку точка c лежит между x и $x+\Delta x$, то c стремится к x при $\Delta x \to 0$. Так как функция f непрерывна, $f(c) \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$.

Итак, $\dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$.

Формула (2) доказана.

Мы получили, что S есть первообразная для f. Поэтому в силу основного свойства первообразных для всех $x \in [a, b]$ имеем: $S(x) = F(x) + C$, где C - некоторая постоянная, а F - одна из первообразных для функции f. Для нахождения C подставим $x = a$: $F(a) + C = S(a) = 0$, откуда $C = -F(a)$.

Следовательно, $S(x) = F(x) - F(a)$

Поскольку площадь криволинейной трапеции равна $S(b)$, подставляя $x = b$ в формулу (4), получим: $S = F(b) - F(a)$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями.

а) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 3$.

б) $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}$.

г) $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$.

Дифференциальное уравнение

(ДУ) – это уравнение, в которое входит неизвестная функция под знаком производной или дифференциала.

Если неизвестная функция является функцией одной переменной, то дифференциальное уравнение называют **обыкновенным** (сокращенно ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение). Если же неизвестная функция есть функция многих переменных, то дифференциальное уравнение называют **уравнением в частных производных**.

Максимальный порядок производной неизвестной функции, входящей в дифференциальное уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения**.

Вот примеры ОДУ первого, второго и пятого порядков соответственно

1) $y' + 1 = 0;$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x \cdot \sin x;$

3) $y^{(5)} + y^{(3)} = a \cdot y, \quad a \in R$

В качестве примеров уравнений в частных производных второго порядка приведем

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad u = u(x, y, z, t), \quad v \in R;$

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = u(x, y)$

Далее мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения *n-ого* порядка вида $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ или $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$, где *Ф(x, y) = 0* неизвестная функция, заданная неявно (когда возможно, будем ее записывать в явном представлении *y = f(x)*).

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется **интегрированием дифференциального уравнения**.

Решение дифференциального уравнения - это неявно заданная функция *Ф(x, y) = 0* (в некоторых случаях функцию *y* можно выразить через аргумент *x* явно), которая обращает дифференциальное уравнение в тождество..

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка

$\boxed{y' = f(x)}$.

Запишем несколько примеров таких ДУ $y' = 0, \quad y' = x + e^x - 1, \quad y' = \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 - 7}}$.

Дифференциальные уравнения $\boxed{f(x) \cdot y' = g(x)}$ можно разрешить относительно производной, произведя деление обеих частей равенства на *f(x)*. В этом случае приходим к уравнению $y' = \frac{g(x)}{f(x)}$, которое будет эквивалентно исходному при $f(x) \neq 0$. Примерами таких ОДУ являются $e^x \cdot y' = 2x+1$, $(\sqrt{x}+2)\cdot y' = 1$.

Если существуют значения аргумента x, при которых функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно обращаются в ноль, то появляются дополнительные решения. Дополнительными решениями уравнения $f(x)\cdot y' = g(x)$ при данных x являются любые функции, определенные для этих значений аргумента. В качестве примеров таких дифференциальных уравнений можно привести $x \cdot y' = \sin x$, $(x^2 - x)\cdot y' = \ln(2x^2 - 1)$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения, в которых выражение, зависящее от y, входит только в левую часть, а выражение, зависящее от x - только в правую часть, это ***дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными***, в которых переменные уже разделены.

В левой части уравнения может находиться производная от игрека и в этом случае решением дифференциального уравнения будет функция игрек, выраженная через значение интеграла от правой части уравнения. Пример такого уравнения - $y' = x + \sin x$.

В левой части уравнения может быть и дифференциал функции от игрека и тогда для получения решения уравнения следует проинтегрировать обе части уравнения. Пример такого уравнения -

$9ydy = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$y' = x + \sin x$

Решение. Пример очень простой. Непосредственно находим функцию по её производной, интегрируя:

$$y = \int (x + \sin x)dx = \int xdx + \int \sin xdx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \cos x + C.$$

Таким образом, получили функцию - решение данного уравнения.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$9ydy = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Решение. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int 9y dy = \int \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Оба интеграла - табличные. Идём к решению:

$$\frac{9}{2}y^2 + C_1 = \operatorname{tg}x + C_2$$

$$y^2 = \frac{2}{9}\operatorname{tg}x + C$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\operatorname{tg}x + C}.$$

Функция - решение уравнения - получена. Как видим, нужно только уверенно знать табличные интегралы и неплохо расправляться с дробями и корнями.

Дифференциальные уравнения, в которых требуется разделить переменные

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, в которых требуется разделить переменные, имеют вид

$$f_1(x) \bullet \varphi_2(y)dx + f_2(x) \bullet \varphi_2(y)dy = 0.$$

В таком уравнении $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - функции только переменной *x*, а $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ - функции только переменной *y*.

Поделив члены уравнения на произведение $\varphi_2(y) \bullet f_2(x)$, после сокращения получим

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy.$$

Как видим, левая часть уравнения зависит только от *x*, а правая только от *y*, то есть переменные разделены.

Левая часть полученного уравнения - дифференциал некоторой функции переменной *x*, а правая часть - дифференциал некоторой функции переменной *y*. Для получения решения исходного дифференциального уравнения следует интегрировать обе части уравнения. При этом при разделении переменных не обязательно переносить один его член в правую часть, можно почленно интегрировать без такого переноса.

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0.$$

Это ***уравнение с разделяющимися переменными***. Решение. Для разделения переменных поделим уравнение почленно на произведение $\sqrt{1-y^2}\bullet\sqrt{1-x^2}$ и получим

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=0.$$

Почленно интегрируем:

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=C,$$

откуда, используя метод замены переменной (подстановки), получаем

$-\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}=C_1$ или $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C$,

поскольку левая часть равенства есть сумма арифметических значений корней. Таким образом, получили общий интеграл данного уравнения. Выразим из него y и найдём общее решение уравнения:

$$y=\pm\sqrt{1-\left(C-\sqrt{1-x^2}\right)^2}.$$

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка $M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy=0$ называется ***однородным***, если $M(x,\ y)$ и $N(x,\ y)$ - однородные функции одной и то же степени.

Функция $f(x,\ y)$ называется однородной функцией *k*-й степени, если для любого *t*выполняется равенство $f(tx,\ ty)=t^k f(x,\ y)$.

В частном случае, если однородная функция имеет нулевую степень, то выполняется равенство

$$f(tx,\ ty)=t^0 f(x,\ y)$$

Пример 1. Установить, являются ли однородными функции

1) $f(x,\ y)=x^2y-3xy^2+y^3$;

2) $\varphi(x,\ y)=x^4-y^4$;

Решение. Находим

$$f(tx,\ ty) = (tx)^2 \bullet ty - 3tx(ty)^2 + (ty)^3 =$$
$$= t^3\left(x^2y - 3xy^2 + y^3\right) =$$
$$= t^3 f(x,\ y).$$

Следовательно, $f(x,\ y)$ - однородная функция третьей степени.

Аналогично устанавливается, что $\varphi(x,\ y)$ - однородная функция четвёртой степени:

$$\varphi(tx,\ ty) = (tx)^4 - (ty)^4 =$$
$$= t^4\left(x^4 - y^4\right) =$$
$$= t^4\varphi(x,\ y).$$

Отношение двух однородных функций одинаковых степеней также есть однородная функция, но нулевой степени.

Пусть $f(x,\ y)$ и $\varphi(x,\ y)$ - однородные функции *k*-й степени. Это означает, что $f(tx,\ ty) = t^k f(x,\ y)$, а $\varphi(tx,\ ty) = t^k\varphi(x,\ y)$. Их отношение - некоторая функция $\psi(x,\ y) = \dfrac{f(x,\ y)}{\varphi(x,\ y)}$, так как $\dfrac{t^k}{t^k} = 1$.

Решение однородного дифференциального уравнения

Для этого преобразуем уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,\ y)}{N(x,\ y)} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x,\ y), \quad (1)$$

где $f(x,\ y) = -\dfrac{M(x,\ y)}{N(x,\ y)}$ - однородная функция нулевой степени как отношение однородных функций одинаковых степеней. Это равенство справедливо при любом *t*. В частности, если $t = \dfrac{1}{x}$, то $f\left(\dfrac{x}{x},\ \dfrac{y}{x}\right) = f(x,\ y)$, или $f(x,\ y) = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$, т. е. функция $f(x,\ y)$ представлена в виде функции от $\dfrac{y}{x}$.

Обозначим это отношение через *z*, т. е. $z = \dfrac{y}{x}$, откуда $y = zx$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = z'x + zx' = z'x + z$$

и уравнение (1) преобразуется так:

$$z'x + z = F(z); \quad \frac{dz}{dx} \bullet x = F(z) - z;$$

$$x\,dz = \left[F(z) - z\right]dx.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные и выполнив почленное интегрирование, затем следует заменить z на $\frac{y}{x}$.

Пример 2. Решить ***однородное дифференциальное уравнение***

$$\left(xy + y^2\right)dx - x^2 dy = 0$$

Решение. Сначала преобразуем данное уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2},$$

а затем произведём подстановку $y = zx$, откуда $y' = z'x + z$. Тогда уравнение примет вид

$z'x + z = \frac{xzx + (zx)^2}{x^2}$, или $x\frac{dz}{dx} = z^2$, или $\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}$.

Почленное интегрирование даёт

$-\frac{1}{z} = \ln|x| + \ln|C|$, или $\ln|Cx| = -\frac{1}{z}$.

Заменяя z на $\frac{y}{x}$, получим $\ln|Cx| = -\frac{x}{y}$, откуда $y = -\frac{x}{\ln|Cx|}$.